

Aula 5

Processamento Digital de Sinais

Prof.^a Viviana Raquel Zurro

Equações de diferença lineares com coeficientes constantes

Conversa Inicial

- ▀ A relação entrada/saída de um sistema linear invariante no tempo discreto (LIT) é caracterizado por:
 - Função do sistema
 - Equação de diferenças
 - Resposta ao impulso

- ▀ Estruturas como base para o desenvolvimento de filtros digitais
- ▀ Implementação por hardware ou software
- ▀ Blocos básicos para formar a estrutura do sistema

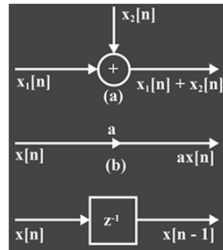
- ▀ Para implementar um sistema LIT são necessários os seguintes elementos:
 - Memória para armazenar dados das sequências
 - Somadores e multiplicadores

Operadores

Soma de seqüências

Multiplicação por uma constante

Atraso unitário



- Para equações de diferença de ordem maior:

$$y(n) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

- Cuja função do sistema é:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

- Definindo $v(n)$:

$$v(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

Diagrama de blocos de equações de diferença

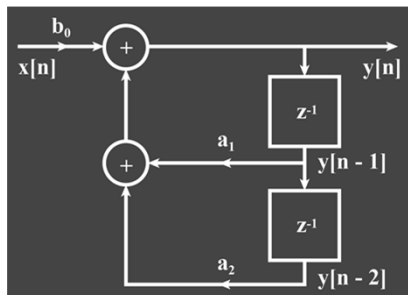
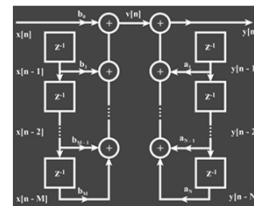
- Considerando a equação de diferenças de segunda ordem:

$$y(n) = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + b_0 x(n)$$

- A função do sistema correspondente é:

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + v(n)$$



$$Y(z) = H_1(z)W(z) = \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right) W(z)$$

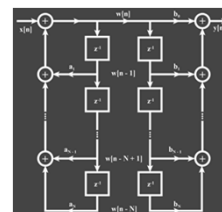
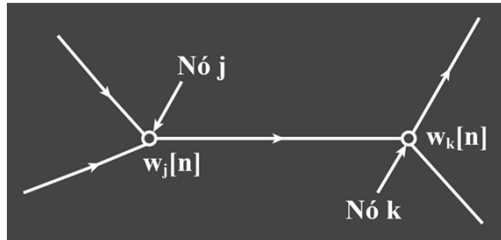


Diagrama de fluxo



Sistemas IIR

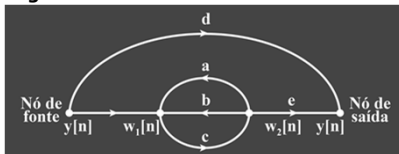
Dado o seguinte sistema:

$$w_1(n) = x(n) + aw_2(n) + bw_2(n)$$

$$w_2(n) = cw_1(n)$$

$$y(n) = dx(n) + ew_2(n)$$

O diagrama de fluxo é:



Definição

- **IIR: resposta ao impulso infinita** (*Infinite Impulse Response*)
- **A resposta não atinge o zero**

Filtro digital de primeira ordem:

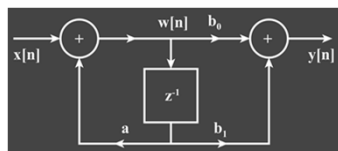
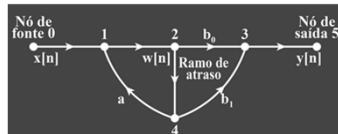
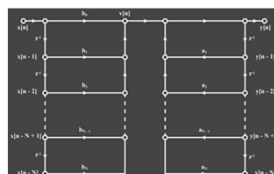


Diagrama de fluxo de sinais



Forma direta



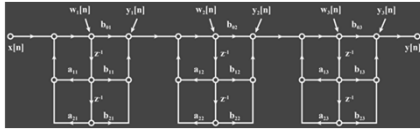
Função do sistema

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Forma em cascata

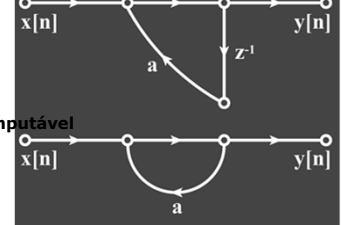
Função do sistema

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N_s} \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}$$



Realimentação

Laço de realimentação



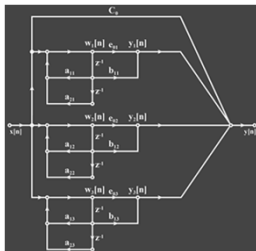
Sistema não computável



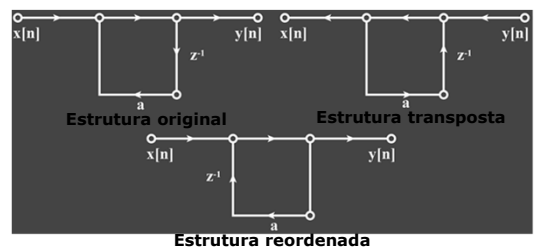
Forma paralela

Função do sistema

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{e_{0k} + e_{1k}z^{-1}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}$$



Forma Transposta



Realimentação

- Todos os diagramas de fluxo têm laços fechados de realimentação. Estes caminhos fechados cuja direção única está indicada com uma seta começam em um nó e diretamente ou indiretamente retornam a ele. Portanto a variável do nó pode depender direta ou indiretamente dela mesma

Sistemas FIR

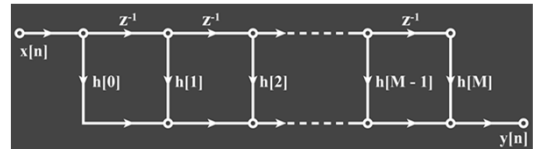
Definição

- **FIR: resposta ao impulso finita (Finite Impulse Response)**
- A resposta atinge o zero quando $t > T$
- Os filtros analógicos (com componentes eletrônicos) geralmente são filtros IIR
- Os filtros para tempos discretos (filtros digitais) baseados em linhas de atraso com derivação (TDL do inglês Tapped Delay Line) que não usam realimentação, são necessariamente filtros FIR

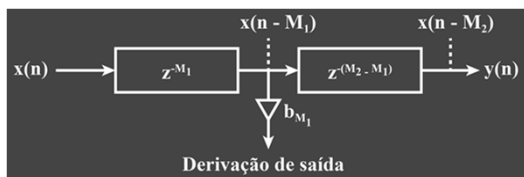
Forma direta

Equação

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$



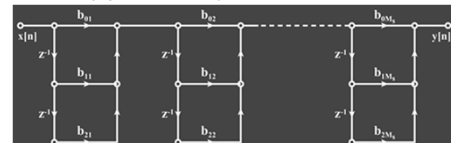
Estrutura FIR



Forma em cascata

Função do sistema

$$H(z) = \sum_{n=0}^M h(n)z^{-n} = \prod_{k=1}^{M_s} (b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2})$$



- Os elementos reativos no filtro analógico têm "memória" e nunca atingem o zero após o impulso
- A estrutura FIR, quando o impulso chega ao fim da TDL, o sistema "não se lembra" do impulso e retorna a seu estado inicial, sendo sua resposta ao impulso igual a zero além desse ponto

Sistemas FIR de fase linear

$$h(M-n) = h(n) \quad n = 0, 1, \dots, M$$

$$h(M-n) = -h(n) \quad n = 0, 1, \dots, M$$

- Sendo M um inteiro par (sistemas tipo I e III) e trabalhando com a equação de convolução discreta:

$$y(n) = \sum_{k=0}^M h(k)x(n-k)$$

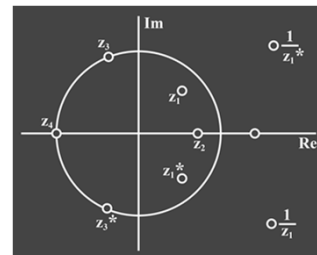
- **Sistema tipo I (usando $h(n)$):**

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M/2-1} h(k)(x(n-k) + x(n-M+k)) + h(M/2)x(n-M/2)$$

- **Sistema tipo III (usando $-h(n)$):**

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M/2-1} h(k)(x(n-k) - x(n-M+k))$$

Simetria dos zeros



- **Sistema tipo II (M ímpar):**

$$y(n) = \sum_{k=0}^{(M-1)/2} h(k)(x(n-k) + x(n-M+k))$$

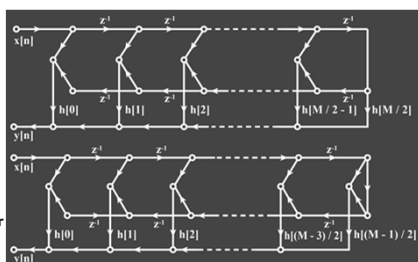
- **Sistema tipo IV:**

$$y(n) = \sum_{k=0}^{(M-1)/2} h(k)(x(n-k) - x(n-M+k))$$

Filtros em treliça

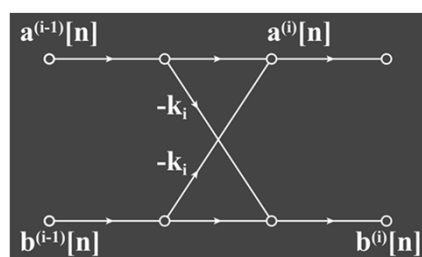
- **Sistemas SISO (Single Input/Single Output) em cascata**
- **Estruturas só zeros**
- **Estruturas só polos**

M
par



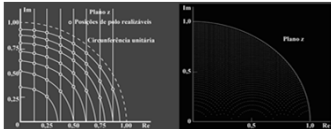
M
ímpar

Estrutura borboleta básica



Sistema IIR

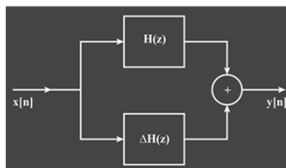
- Considerando um sistema de polos complexos conjugados implementado na forma direta, para que o sistema seja mais estável, estes polos devem estar numa grade do plano z :



Finalizando

Sistema FIR

- Em sistemas causais FIR, como todos os polos estão em $z = 0$ só deveremos levar em conta a posição dos zeros do sistema.



- Estruturas básicas para implementação de filtros digitais
- Diagramas de blocos para equações de diferença lineares com coeficientes constantes
- Diagramas de fluxo destas equações e estruturas básicas para o desenvolvimento de filtros digitais
- Problemas inerentes à digitalização do sinal devido aos ruídos de quantização no processo de conversão A/D

- Podem apresentar sérios problemas de estabilidade
- Erros de quantização: polos e zeros do sistema se movem no plano z
- A quantização introduz ruído no sinal

Referências



■ **OPPENHEIM, V.; SCHAFER, R. W.**
Processamento em Tempo Discreto de Sinais.
3. ed. São Paulo: Pearson Education do
Brasil, 2012.

